Oponentský posudek diplomové práce O. Luhana
„Systémy morfismů nad Gödelovou fuzzy logikou"
zpracovala RNDr. Zuzana Haniková, Ph.D., Ústav informatiky AV ČR, v.v.i

Práce studuje některé příklady systémů morfismů v axiomatické teorii GFCT, což je varianta typované teorie tříd (Fuzzy Class Theory) ve specifickém systému Gödelovy fuzzy logiky. Je členěna do čtyř částí: první je úvodní, nabízející přehled studované problematiky s citacemi některých stěžejních prací, druhá je obsáhlým shrnutím potřebného aparátu fuzzy logiky a v ní budované teorie tříd a přehledem v práci zmiňovaných pojmů teorie kategorií, třetí studuje zvolené systémy morfismů v prezentované teorii tříd a závěrečná shrnuje dosavadní výsledky a zvažuje možné směry dalšího rozvoje. Práce se viditelně a udatně potýká s prázdnotou, rozprostírající se před každým badatelem, který se pokouší o budování analogií teorií známých z klasické matematiky, tj. i klasické logiky, nad nějakým systémem logiky neklasické. Věnuje se tedy, více či méně explicitně, problému hledání vhodných definic a dokazování výsledků, které by opravňovaly badatele k domněnce, že jím budovaná teorie je skutečně v nějakém smyslu *analogická* příslušné teorii klasické (zde, teorii kategorií).

Obsáhlejší úvodní text práce je velmi čtivý a předkládá přehledné a korektní shrnutí studované problematiky včetně mnoha odkazů do literatury (seznam citovaných prací čítá 43 položek). Zahrnutí tohoto textu považuji za velmi užitečné jak pro čtenáře, tak i pro autora. Texty tohoto ražení bývají subjektivní (což jim neubírá na zajímavosti), nejinak je tomu i v tomto případě.

V části dvě autor podává výklad základů prvořádové Gödelovy fuzzy logiky (konkrétněji, vícesortového systému, se spojkou Δ a s ostrou rovností), dále základů fuzzy teorie tříd, která je obměnou citované práce [5], a některých základních pojmů (klasické) teorie kategorií. Je třeba ocenit, že autor se obeznámil s poměrně širokou škálou témat, a že v této a následující části práce vypracoval větší množství formálních důkazů ve zvolené Gödelově logice včetně číslovaného seznamu pomocných tvrzení. V této části se však objevují některé rozpaky vzbuzující pasáže. Například, v definici 2.1.7, která má patrně zavést pojem Gödelovy algebry, se (netradičně) vychází od libovolné částečně uspořádáné množiny s největším a nejmenším prvkem, na které jsou definovány operace min, max a $\Rightarrow$. Odhlédněme od toho, že pojem algebra evokuje strukturu s jediným predikátovým symbolem (pro rovnost). Zvláštní je to, že u operací min a max není nijak vysvětleno, jaký mají vztah k částečnému uspořádání, a operace $\Rightarrow$ není definována dobře: nelze požadovat, aby pro x, y bylo $x \Rightarrow y$ rovno 1 pro $x \leq y$ a y jinak. Uvažme např. algebru G_4 x G_4 (kde G_4 je čtyřprvkový řetězec s univerzem 0,a,b,1) a ohodnocení x=[a,b] a y=[b,a].
Dále, v poznámce 2.1.6 je lepší říci „the standard G-algebra", stávající neurčitý člen může budit dojem, že standardních G-algeber je více.
Dále, na str. 19, 2. odstavec, nerozumím první větě, tj. "For atomic objects, i.e. elements of the crisp universe U, x=y holds in a model if and only if x and y denote the same object in the universe U".
Jde o definici? Co jsou x a y, proměnné, nebo prvky modelu?

Nelíbí se mi, jak volně autor zachází s vícesortovým jazykem, zavedeným v Def. 2.1.12 a v návaznosti též Def. 2.2.1. Je zavedeno spočetně nekonečně sort proměnných (zhruba, pro „objekty" a „množiny různých řádů"), a jsou zavedeny konvence ve značení, např. že proměnné pro objekty budou značeny malým písmenem. V definici 2.1.12 je výslovně uvedeno, že každému predikátovému symbolu je přiřazena nejen četnost, ale také sekvence sort příslušné délky. Je tedy, striktně vzato, nutno uvažovat např. predikáty rovnosti a náležení pro různé sorty zvlášť. O tom práce taktně mlčí: dále v textu jsem nenašla téměř žádné známky toho, že by autor reflektoval tyto skutečnosti, které sám zavedl. Zejména, u axiomu komprehenze na str. 18 by mělo být uvedeno, že sorta proměnných musí souhlasit se sortou prvního argumentu relačního symbolu $\in$, a že takto vzniknuvší množina je sorty druhého argumentu tohoto relačního symbolu. Jakého typu je V (univerzální třída), která z mnoha relací náležení se použije v komprehenzi v její definici? Toto by si zasloužilo zmínku, z textu to není jasné (možná je to jasné ze značení, to ale není konzistentně dodržováno) a je to podstatné v dalším textu. Jakého typu je Pow(A), na str. 20 nahoře, v závislosti na A (obě jsou značeny stejným fontem, což je v rozporu s dříve zavedenou konvencí)?

Dále, např. důkaz Prop. 3.4.4 využívá faktu 3.1.10, který ale nepočítá s tím, že by mohlo jít o různě druhy rovností (resp. o rovnosti pro různé druhy sort).

V části 3 je zaveden pojem systému morfismů (Definice 3.1.1). Definice mnoho neříká, pouze slovně specifikuje, že jde o pětici entit, u některých udává, že jde o ostré množiny, u některých uvádí typ jednotlivých entit (např. kartézský součin některých předchozích. Po dokázání řady pomocných technicky náročných tvrzení jsou v sekci 3.2 a 3.3 prezentovány konkrétní entity v teorii GFCT, které mají sloužit jako příklady systémů morfismů. V práci jsou dále ověřena některá tvrzení a definovány některé pojmy (syntakticky) obdobné těm z klasické teorie kategorií (viz Remark 3.2.2, Def. 3.4.1); k některým takovým tvrzením jsou u některých systémů morfismů uvedeny protipříklady (např. Prop. 3.2.5). Nejde tedy o ověřování v Gödelově logice internalizovaných axiomů teorie kategorií, jak stálo v zadání, ale některých konkrétních tvrzení. Pojem kategorie (ani jako ostrý) není v teorii vůbec zaveden.

Tato část práce je patrně stěžejní, pokud jde o samostatnou, tvořivou práci autora. Řekla bych, že se ubírá správným směrem, ale jsou zde patrné nedostatky. Například, v jakém smyslu jsou systémy morfismů definované v Def. 3.2.1 „based on the crisp category Rel"? Pojem kategorie není k dispozici. Proč je zde uvedeno, že množina objektů je V (univerzální třída), zatímco o pár řádků výše je uvedeno, že objekty jsou fuzzy množiny (obdobně jako v příkladu 2.3.2), a také množina morfismů jsou podmnožiny VxV? *Které* fuzzy množiny jsou objekty tohoto systému morfismů? Dále, nejsou dodrženy notační konvence zavedené autorem, např. v Def. 3.4.1, morfismy *f, g* jsou patrně sorty stejné, nikoli nižší, jako objekty A a B.
Dále, pro úplnost, bylo by asi preciznější definovat vlastnost „být systémem morfismů" jako unární predikát (třeba *Morf)* a pro konkrétní návrhy (třeba *A*) uvést, ev. ověřit, že GFCT dokazuje *Morf*(*A*). Také by bylo vhodné vyjasnit, co se přesně míní pojmy jako „fuzzy analogue of a crisp category", zmíněnými např. na poslední stránce práce.

Závěrečná část práce shrnuje výsledky a předestírá některé možnosti dalšího rozvoje. Dosaženými výsledky jsou podle uvedených bodů vhodně zvolené definice („fuzzy correlates of classical category-theoretial concepts") a příklady kýžených struktur („fuzzy analogues of particular classical categories").

Práce je psána anglicky, což vesměs nepůsobí rušivě (ačkoli čeština by mohla napomoci přesnějšímu vyjadřování). Bylo by vhodné použít spellcheck, eliminovalo by to překlepy („digrams", „conceps" …).

Autor víceméně korektně vyložil problematiku, kterou se hodlá zabývat, a prokázal schopnost pracovat v neklasickém formálním systému, což je potřeba ocenit. Práce nicméně vykazuje formální nedostatky zmíněné výše. Postrádám také shrnutí nejen toho, co se podařilo (je obtížné stručně říci, čeho bylo vlastně dosaženo, což je pro podobné novátorské práce typické), ale i toho, co se nepodařilo nebo ani podařit nemohlo a zejména proč, což by mohlo být cenným vodítkem pro další badatele nebo event. i pro autora samotného po pár letech. Práce tedy vyznívá poněkud do ztracena. Práci doporučuji k obhájení a předběžně navrhuji hodnotit ji známkou 3 (dobře).

V Praze dne 12.9.2014
Zuzana Haniková

Příloha: podrobnější připomínky k textu (pro autora)

1. Gödel nejspíš (implicitně) definoval pouze výrokovou Gödelovu logiku, nikoli celý v práci využívaný systém, jak je řečeno na str. 5.
2. S popisem evoluce formální fuzzy logiky a teorií v ní budovaných, uvedenými v první polovině str. 6, lze polemizovat v tom smyslu, že je poněkud jednostranný. Tvrdí se zde: „ … for decades fuzzy logic had not been the subject of interest for most mathematicians or logicians (as an example of honourable exception can serve the work of Gottwald …) … A breakthrough came in the 1990's. Especially thanks to the famous work of Hájek...“ Je fakt, že v letech 1984 a 1992 uveřejnili japonští matematici G. Takeuti a S. Titani dva články obsáhle pojednávající o teorii množin v Gödelově logice (čerpající z bohaté tradice intuicionistické teorie množin). Tyto práce jsou podle mne přinejmenším stejně relevantní jako práce Gottwalda (a Klauy); traduje se, že to byl právě v pořadí druhý ze zmiňovaných článků, který utvrdila P. Hájka (který se s Takeutim v r. 1991 v Praze setkal a článek s ním konzultoval) v přesvědčení, že formální teorie fuzzy logiky jsou možné, smysluplné a zajímavé.
3. V technických důkazech sekce 3.1 postrádám kvantifikátory (např. 3.1.6), oproti sekci 3.2 (např. 3.2.6).
4. Pokud je již řečeno, které jsou základní spojky, je zbytečné definovat ohodnocující funkce pro spojky odvozené (jak se děje v Def. 2.1.2)
5. Na str. 14, 3. řádek, je již dovětek "for each M-evaluation e" zbytný.
6. Nesouhlasila bych s obecným tvrzením, že "crisp sets can be identified with their characteristic functions". To může být pravda, ale jen za jistých okolností.
7. Na str. 18, k formuli $x \in A$ musí být ještě dána interpretace, aby něco vyjadřovala (např. pravdivostní stupeň)
8. Nelíbí se mi věta "Identical atomic objects, fuzzy sets and membership degrees are freely intersubstitutable within formulas of GFCT." na str. 19. Jde o míchání syntaxe a sémantiky.
9. Dále, proč je v sekci 2.3 zaveden pojem diagramu, když není využíván v části 3?